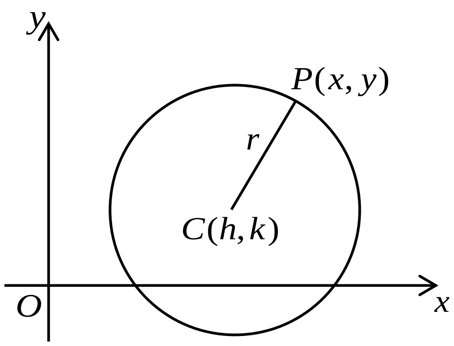
7 圓的方程 (Equation of a Circle)

對於一個圓，圓周上所有的點都與一固定點 (圓心 (centre)) 保持固定的距離，而該距離就是圓的半徑 (radius)。

7.1 圓的方程的標準式 (Standard Form)

設 $P(x, y)$ 為圓上的一動點，$C(h, k)$ 為圓心及 r 為半徑。



$PC = r$

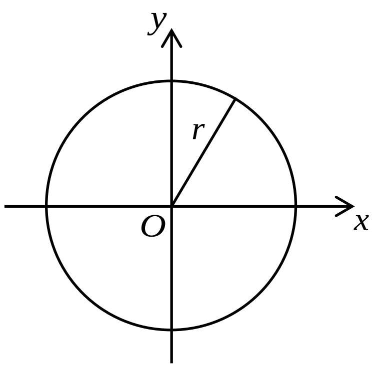
藉距離公式，

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

備註：

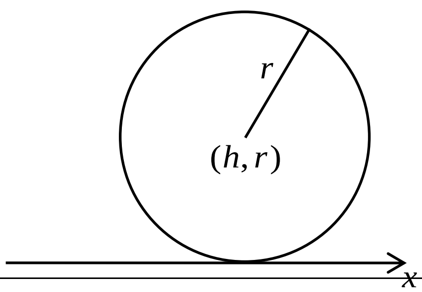
1. 圓心為原點 $O(0,0)$ 及半徑為 r 的圓的方程為 $x^2+y^2=r^2$。



2. 半徑為 r 及 x 軸為切線的圓的方程

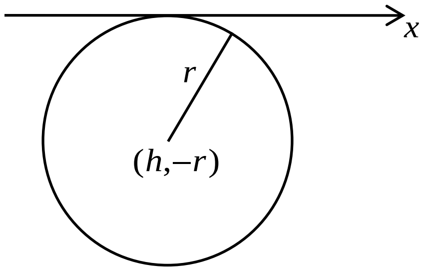
(a) 圓心位於第一或第二象限

$$(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$$



(b) 圓心位於第三或第四象限

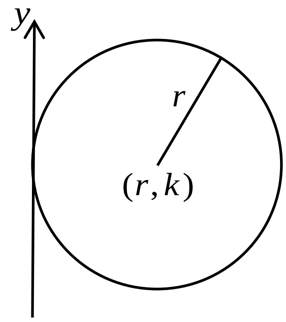
$$(x-h)^2+(y+r)^2=r^2$$



3. 半徑為 r 及 y 軸為切線的圓的方程

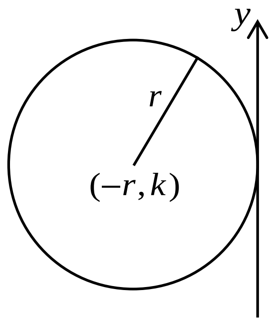
(a) 圓心位於第一或第四象限

$$(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$$



(b) 圓心位於第二或第三象限

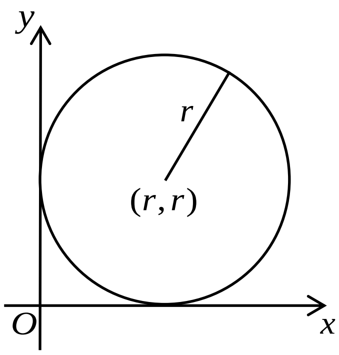
$$(x+r)^2+(y-k)^2=r^2$$



4. 半徑為 r，x 軸及 y 軸均為切線的圓的方程

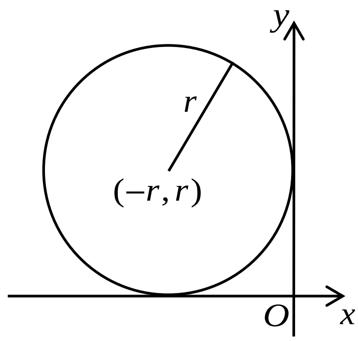
(a) 圓心位於第一象限

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$



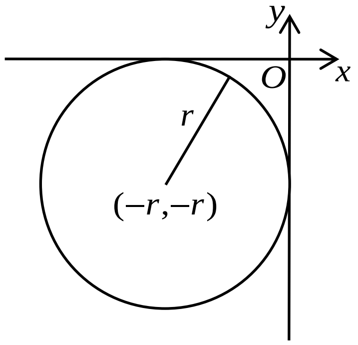
(b) 圓心位於第二象限

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$



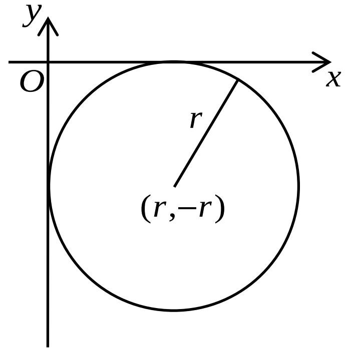
(c) 圓心位於第三象限

$$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$$



(d) 圓心位於第四象限

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$



例 1

求圓心為原點 $O(0,0)$ 及半徑為 1 的圓的方程。

解：

例 2

求圓心為原點 $O(0,0)$ 及半徑為 7 的圓的方程。

解：

例 3

求圓心為點 $(2,3)$ 及半徑為 4 的圓的方程。

解：

例 4

求圓心為點 $(-1,3)$ 及半徑為 $\sqrt{3}$ 的圓的方程。

解：

例 5

求圓心為點 $(-1,4)$ 及通過點 $(2,6)$ 的圓的方程。

解：

例 6

某圓的方程為 $(x-4)^2+(y+2)^2=16$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 7

某圓的方程為 $(x-1)^2+(y+1)^2=8$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 8

某圓的方程為 $2x^2+2y^2=3$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 9

求通過點 $(1,5)$ 且與 y 軸相切於點 $(0,3)$ 的圓的方程。

解：

例 10

求通過點 $(-2,-1)$ 及點 $(4,-1)$ 且 x 軸為切線的圓的方程。

解：

例 11

求通過點 $(8,1)$ 且 x 軸及 y 軸均為切線的圓的方程。

解：

7.2 <u>圓的方程的一般式 (General Form)</u>

圓的標準方程為

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D=-2h$，$E=-2k$ 及 $F=h^2+k^2-r^2$。

此方程稱為圓的方程的一般式。

$h=-\frac{D}{2}$

$k=-\frac{E}{2}$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-F}$$
$$=\sqrt{(-\frac{D}{2})^2+(-\frac{E}{2})^2-F}$$
$$=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$$
$$=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

圓心的坐標 $=(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$

半徑 $=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

備註：

(a) 圓的方程的一般式為二元二次方程，其中 x^2 及 y^2 的係數相同及沒有 xy 項。由此可知 $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ 為一圓的方程。

(b) 圓的方程的一般式亦可用 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 表示，其中圓心的坐標為 $(-g,-f)$ 及半徑為 $\sqrt{g^2+f^2-c}$。

證明：

圓心的坐標

$=(-\frac{2g}{2},-\frac{2f}{2})$

$=(-g,-f)$

半徑

$=\frac{1}{2}\sqrt{(2g)^2+(2f)^2-4c}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4g^2+4f^2-4c}$$

$$=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

(c) 將圓的方程的一般式轉為標準式 ✂

圓的方程的一般式為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。

利用配方法，

$$x^2+Dx+(\frac{D}{2})^2+y^2+Ey+(\frac{E}{2})^2=(\frac{D}{2})^2+(\frac{E}{2})^2-F$$

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$$

圓的方程的標準式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，其中 $h=-\frac{D}{2}$，$k=-\frac{E}{2}$

及 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$。

例 12

某圓的方程為 $x^2+y^2+2x+4y-14=0$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 13

某圓的方程為 $x^2+y^2-4x-5=0$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 14

某圓的方程為 $x^2+y^2-12y+20=0$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 15

某圓的方程為 $2x^2+2y^2+14x+6y-11=0$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 16

某圓的方程為 $(x+1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$。求圓心的坐標和半徑。

解：

例 17

某圓的方程為 $(mx-ny-4)(x+2y+5)+4y(5y+4)=0$，其中 m 及 n 為常數。

(a) 求 m 及 n 的值。

(b) 求圓心的坐標和半徑。

解：

7.3　<u>利用圓的方程理解圓的一些特徵</u>

1. 圓的方程的一般式為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 。

   由於圓的半徑是 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ ，可得

情況	圓的性質
$D^2+E^2-4F>0$	實圓
$D^2+E^2-4F=0$	點圓
$D^2+E^2-4F<0$	虛圓

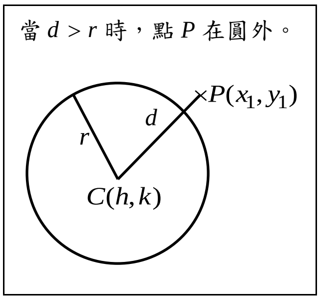
2. 點與圓位置的關係

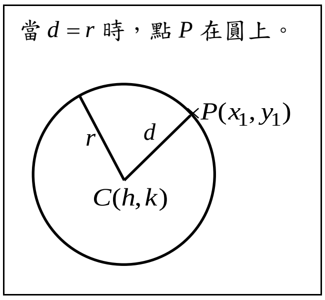
   圓的方程的標準式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 。

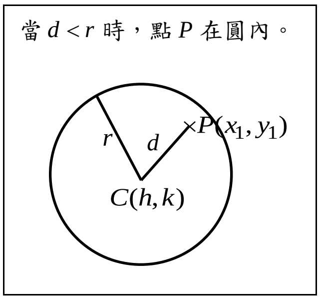
   圓心 C 的坐標 $=(h,k)$

   設點 P 的坐標 $=(x_1,y_1)$ 及 $PC=d$ 。

   $d=\sqrt{(h-x_1)^2+(k-y_1)^2}$

(a)


(b)


(c)


備註：

圓的方程的一般式為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 。

設點 P 的坐標 $=(x_1,y_1)$ 。

(a) 當 ${x_1}^2+{y_1}^2+Dx_1+Ey_1+F>0$ 時，點 P 在圓外。

(b) 當 ${x_1}^2+{y_1}^2+Dx_1+Ey_1+F=0$ 時，點 P 在圓上。

(c) 當 ${x_1}^2+{y_1}^2+Dx_1+Ey_1+F<0$ 時，點 P 在圓內。

例 18

設 F 為一常數。若方程 $x^2+y^2-4x+6y+F=0$ 代表一個實圓，求 F 的取值範圍。

解：

例 19

設 F 為一常數。若方程 $x^2+y^2-2x+4y+F=0$ 代表一個點圓，求 F 的值。

解：

例 20

設 F 為一常數。若方程 $x^2+y^2-2x+10y+F=0$ 代表一個虛圓，求 F 的取值範圍。

解：

例 21

某圓的方程為 $(x-2)^2+(y-5)^2=25$。點 $P(-1,7)$ 位於圓上、圓內還是圓外？試解釋你的答案。

解：

例 22

某圓與 y 軸相切於點 $(0,3)$ 且通過點 $(1,5)$。

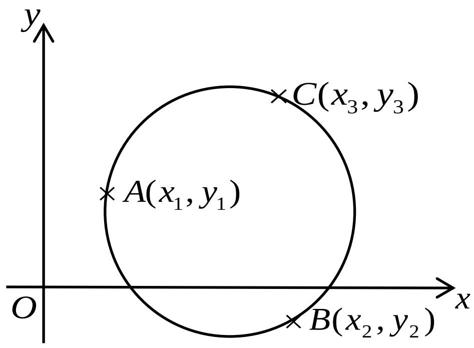
(a) 求該圓的方程。

(b) 點 $R(-2,1)$ 位於圓上、圓內還是圓外？試解釋你的答案。

解：留意圓心的 y 坐標 $=3$。

7.4 通過三個不共線的點的圓的方程

圓的方程的一般式為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 D、E 及 F 均為常數。
已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 及 $C(x_3,y_3)$ 為一個圓上三不共線的點。



把 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 及 $C(x_3,y_3)$ 代入圓的方程，解 D、E 及 F。由此，可求得圓的方程。
備註：給定其他條件亦可參考此方法而求得圓的方程。

例 23
求通過點 $(0,1)$、點 $(2,-3)$ 及點 $(-4,-1)$ 的圓的方程。
解：

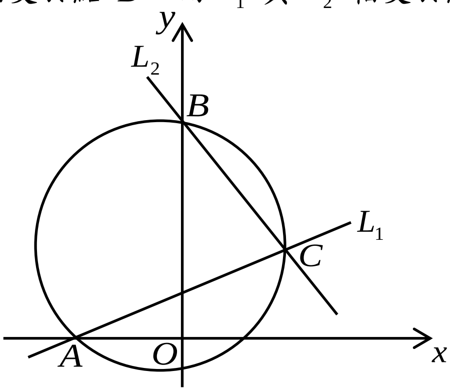
例 24

求通過點 $(0,1)$ 及點 $(-2,5)$ 且圓心位於直線 $x-y+5=0$ 上的圓的方程。

解：

例 25

圖中，直線 L_1 及直線 L_2 的方程分別為 $x-3y+3=0$ 及 $4x+3y-18=0$。L_1 與 x 軸相交於點 A，L_2 與 y 軸相交於點 B，而 L_1 與 L_2 相交於點 C。



(a) 求 A、B 和 C 的坐標。

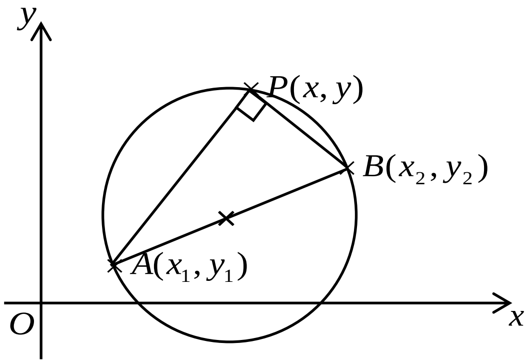
(b) 求通過 A、B 和 C 的圓的方程。由此，求圓的圓心的坐標和半徑。

(c) 已知點 D 的坐標為 $(-1,6)$。證明 $ABCD$ 為一圓內接四邊形。

解：

7.5 給定圓上直徑端點的坐標的圓的方程

設 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 為一個圓的直徑的端點，$P(x, y)$ 為圓上的一任意點。



$PA \perp PB$

$(PA$ 的斜率$)\times(PB$ 的斜率$) = -1$

圓的方程為

$$(\frac{y-y_1}{x-x_1})(\frac{y-y_2}{x-x_2}) = -1$$
$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$
$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2 = 0$$

圓心的坐標 $=(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

圓的方程為

$$(x-\frac{x_1+x_2}{2})^2+(y-\frac{y_1+y_2}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)^2$$

$$(2x-(x_1+x_2))^2+(2y-(y_1+y_2))^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$4x^2-4(x_1+x_2)x+(x_1+x_2)^2+4y^2-4(y_1+y_2)y+(y_1+y_2)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$4x^2-4(x_1+x_2)x+x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+4y^2-4(y_1+y_2)y+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2$$
$$4x^2-4(x_1+x_2)x+4x_1x_2+4y^2-4(y_1+y_2)y+4y_1y_2 = 0$$
$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2 = 0$$

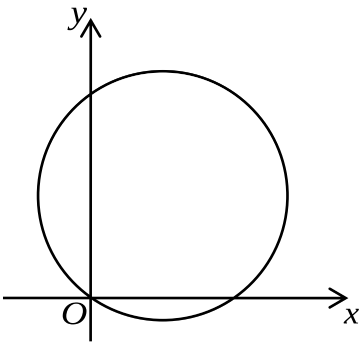
例 26

某圓的一直徑的端點的坐標為 $(-3,4)$ 及 $(4,1)$。求該圓的方程。

解：

7.6 一些特殊的圓的方程

1. 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ 代表一個圓通過原點，其中 D 及 E 均為常數。

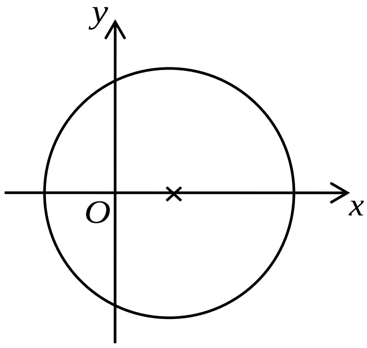


例 27

求通過點 (0,0) 、點 (1,1) 及點 (−3,3) 的圓的方程。

解：

2. 方程 $x^2+y^2+Dx+F=0$ 代表一個圓其圓心位於 x 軸上，其中 D 及 F 均為常數。

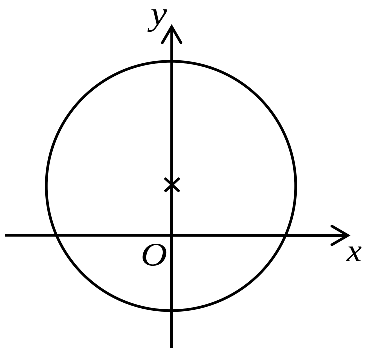


例 28

求通過點 (1,1) 而半徑為 $\sqrt{5}$ 且圓心位於正 x 軸上的圓的方程。

解：

3. 方程 $x^2+y^2+Ey+F=0$ 代表一個圓其圓心位於 y 軸上，其中 E 及 F 均為常數。

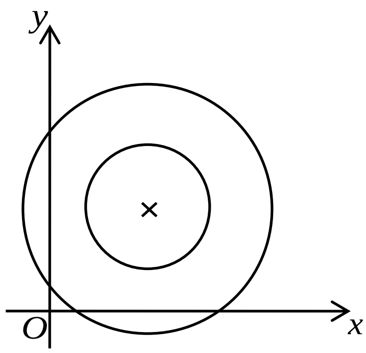


例 29

求通過點 (4,2) 及點 (0,6) 且圓心位於 y 軸上的圓的方程。

解：

4. 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F_1=0$ 及 $x^2+y^2+Dx+Ey+F_2=0$ 代表兩個同心圓，其中 D、E、F_1 及 F_2 均為常數，且 $F_1 \neq F_2$。



例 30

已知圓 C_1 通過點 $(2,-4)$ 而圓心與圓 $C_2: x^2+y^2-x+6y-12=0$ 的相同。求 C_1 的方程。

解：

例 31

已知圓 C_1 的圓心與圓 $C_2: x^2+y^2-4x+3=0$ 的相同，且 C_1 的半徑為 C_2 的三倍。

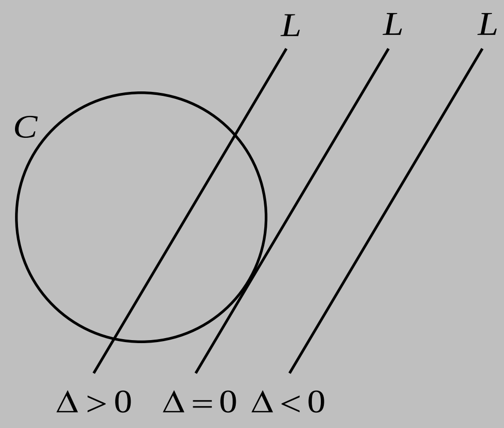
(a) 求 C_1 的方程。

(b) C_1 是否與圓 $C_3: x^2+y^2-4x+10y+25=0$ 相切？試解釋你的答案。

解：

7.7 直線與圓的相交 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $y = mx + c$ 及 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 m、c、D、E 及 F 均為常數。



把 y 由 L 代入 C，可得

$$x^2 + (mx + c)^2 + Dx + E(mx + c) + F = 0$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 + Dx + Emx + Ec + F = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (2mc + D + Em)x + c^2 + Ec + F = 0$$

方程的實根就是 L 與 C 交點的 x 坐標。

判別式，$\Delta = (2mc + D + Em)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 + Ec + F)$

情況	方程的根	交點的數目
$\Delta > 0$	兩個相異實根	2
$\Delta = 0$	兩個相同實根	1
$\Delta < 0$	無實根	0

設 L 與 C 相交於點 $A(x_1, y_1)$ 及點 $B(x_2, y_2)$，而 $M(\bar{x}, \bar{y})$ 為 AB 的中點。

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$
$$= -\frac{2mc + D + Em}{2(1 + m^2)}$$

$$\bar{y} = m\bar{x} + c$$
$$= -\frac{m(2mc + D + Em)}{2(1 + m^2)} + c$$

例 32 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $x-y+4=0$ 及 $x^2+y^2+2x-8y-8=0$。求 L 與 C 的交點的坐標。

解：

例 33 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $3x+4y-34=0$ 及 $x^2+y^2+2x-6y-15=0$。求 L 與 C 的交點的坐標。

解：

例 34 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $x+y+1=0$ 及 $x^2+y^2=25$。求 L 與 C 的交點的數目。

解：

例 35 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $2x+y+2=0$ 及 $x^2+y^2+6x+2y+5=0$。求 L 與 C 的交點的數目。

解：

例 36 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $x+y-10=0$ 及 $x^2+y^2-6x-4y+5=0$。求 L 與 C 的交點的數目。

解：

例 37 ✂

已知點 $(3,2)$ 位於圓 $C: x^2+y^2+cx+y-6=0$ 上，其中 c 為一常數。

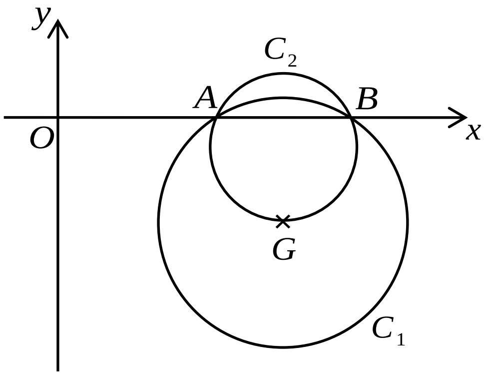
(a) 求 c 的值。

(b) 求 C 與 y 軸的交點的坐標。

解：

例 38 ✂

圖中，圓 C_1 的方程為 $x^2+y^2-8x+4y+15=0$。C_1 的圓心為 G，且與 x 軸相交於點 A 及點 B。



(a) 求 A 及 B 的坐標。

(b) 已知圓 C_2 通過點 A、B 及 G。

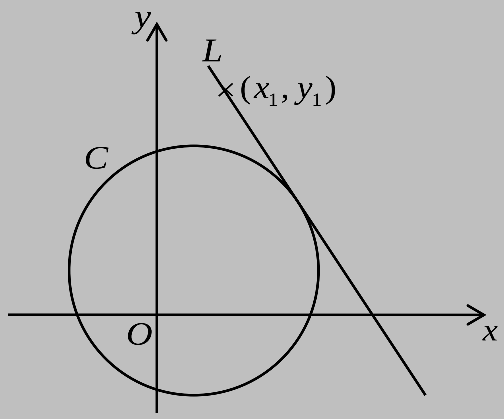
(i) 求 C_2 的方程。

(ii) 求 C_1 和 C_2 的面積的比。

解：

7.8 通過在圓外點的圓的切線方程 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 D、E 及 F 均為常數。直線 L 通過圓 C 外的點 (x_1, y_1)。已知 L 為 C 的切線，且斜率為 m。



留意 L 的方程為 $y-y_1=m(x-x_1)$。

把 y 由 L 代入 C，可得

$$x^2+(m(x-x_1)+y_1)^2+Dx+E(m(x-x_1)+y_1)+F=0$$

$$x^2+(mx-mx_1+y_1)^2+Dx+E(mx-mx_1+y_1)+F=0$$

$$x^2+m^2x^2+2m(y_1-mx_1)x+(y_1-mx_1)^2+Dx+Emx-Emx_1+Ey_1+F=0$$

$$(m^2+1)x^2+(2my_1-2m^2x_1+D+Em)x+(y_1-mx_1)^2-Emx_1+Ey_1+F=0$$

L 為 C 的切線，可得判別式，$\Delta=0$。

$$(2my_1-2m^2x_1+D+Em)^2-4(m^2+1)((y_1-mx_1)^2-Emx_1+Ey_1+F)=0$$

求 m 的值，從而求得圓的切線方程。

例 39 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $y=mx-4$ 及 $x^2+y^2-20x-12y+116=0$，其中 m 為一常數。若 L 為 C 的切線，求 m 的值。

解：

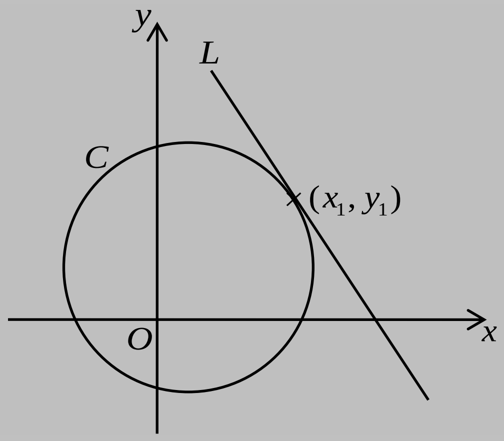
例 40 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2-6x-2y=0$。求通過點 $(-2,-4)$ 的 C 的切線方程。

解：

7.9 <u>通過在圓上點的圓的切線方程</u> ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。直線 L 通過 C 上的點 (x_1, y_1)，且為 C 的切線。



圓心的坐標 $=(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$

C 的切線方程為

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y_1-(-\frac{E}{2})}{x_1-(-\frac{D}{2})}\right)=-1$$

$$(y-y_1)(2y_1+E)=-(x-x_1)(2x_1+D)$$

$$2y_1y+Ey-2y_1^{\ 2}-Ey_1=-2x_1x-Dx+2x_1^{\ 2}+Dx_1$$

$$2x_1x+2y_1y+Dx+Ey-2x_1^{\ 2}-2y_1^{\ 2}-Dx_1-Ey_1=0$$

由於 (x_1, y_1) 位於 C 上，可得 $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+Dx_1+Ey_1+F=0$ 。

C 的切線方程為

$$2x_1x+2y_1y+Dx+Ey-2(-Dx_1-Ey_1-F)-Dx_1-Ey_1=0$$

$$2x_1x+2y_1y+Dx+Ey+Dx_1+Ey_1+2F=0$$

$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}D(x+x_1)+\frac{1}{2}E(y+y_1)+F=0$$

例 41 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2-2x-4y-8=0$。直線 L 通過 C 上的點 $(3,5)$，且為 C 的切線。求 L 的方程。

解：

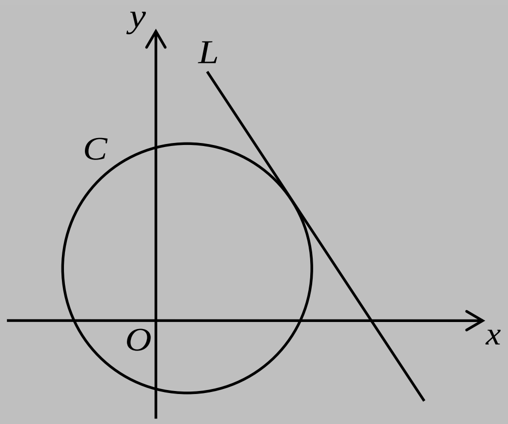
例 42 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2-5x-4y+4=0$。直線 L 通過 C 上的點 $(5,2)$，且為 C 的切線。求 L 的方程。

解：

7.10 在給定斜率的圓的切線方程 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。已知直線 L 為 C 的切線，且斜率為 m。



設 L 的方程為 $y=mx+c$。

把 y 由 L 代入 C，可得

$x^2+(mx+c)^2+Dx+E(mx+c)+F=0$

$x^2+m^2x^2+2mcx+c^2+Dx+Emx+Ec+F=0$

$(m^2+1)x^2+(2mc+D+Em)x+c^2+Ec+F=0$

L 為 C 的切線，可得判別式，$\Delta=0$。

$(2mc+D+Em)^2-4(m^2+1)(c^2+Ec+F)=0$

求 c 的值，從而求得圓的切線方程。

例 43 ✂

直線 L 及圓 C 的方程分別為 $y=3x+c$ 及 $x^2+y^2+4x-4y-2=0$，其中 c 為一常數。若 L 為 C 的切線，求 c 的值。

解：

例 44 ✂

圓 C 的方程為 $x^2+y^2-6x-2y=0$。求斜率為 $\frac{1}{3}$ 的 C 的切線方程。

解：