4 求導法 (Differentiation)

4.1 函數的導數 (Derivative)

定義

一個函數 $y=f(x)$ 對 x 的導數記作 $\frac{d}{dx}f(x)$、$f'(x)$、$\frac{dy}{dx}$ 或 y'。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

備註：

1. $\frac{dy}{dx}$ 是一個符號，並不是一個分數。
2. 若當 $x=x_o$ 時，$\frac{dy}{dx}$ 存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=x_o$ 可微 (differentiable)。若對於任何 x 值 $f(x)$ 皆是可微，則 $f(x)$ 稱為可微函數。
3. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_o}$ 表示當 $x=x_o$ 時，$\frac{dy}{dx}$ 的值。同理，$f'(x_o)$ 表示當 $x=x_o$ 時，$f'(x)$ 的值。
4. 求一個函數的導數的過程，稱為求導法。透過定義來求函數的導數，這個方法稱為從基本原理求導數 (differentiation from first principles)。
5. 兩個重要的極限
   (a) $\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$，其中 θ 以孤度為單位。
   (b) $\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

例 1

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(3-4x)$。

解：

例 2

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(x^2-3x)$。

解：

例 3

設 $f(x)=x^2+5x$。以 h 表 $f(1+h)$。由此，從基本原理求 $f'(1)$。

解：

例 4

從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}(x^3)$。

解：

例 5

從基本原理求 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+5}\right)$。

解：

例 6

從基本原理求 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)$。

解：

例 7

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x-1})$。

解：

例 8

從基本原理求 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}\right)$。

解：

例 9

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\sin 2x)$。

解：

例 10

從基本原理求 $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{x}{3}\right)$。

解：

例 11

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\sin^2 x)$。

解：

例 12

從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right)$。

解：

例 13

設 $f(x)=e^{4x}$。以 h 表 $f(2+h)$。由此，從基本原理求 $f'(2)$。

解：

例 14

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\ln(3x+1))$ 。

解：

4.2 求導法 (Differentiation) 的基本法則

1. 常數法則 (Constant Rule)：$\frac{d}{dx}C=0$，其中 C 為一常數。

證明：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}C\\&=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\&=0\end{aligned}$$

2. 冪法則 (Power Rule)：$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$，其中 n 為一有理數。

證明：

(a) n 為正整數：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}x^n\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+h^n-x^n\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots\cdots+h^{n-1}\right)\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$

(b) n 為負整數：

$$\frac{d}{dx}x^n$$

$$=\frac{d}{dx}(x^{-m})$$ ，其中 $n=-m$ 及 $m>0$。

$$\begin{aligned}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right)\\&=\frac{(x^m)(0)-(1)(mx^{m-1})}{(x^m)^2}\\&=-\frac{m}{x^{m+1}}\\&=-mx^{-m-1}\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$

(c) n 為一分數：

$y=x^n$

設 $n=\dfrac{p}{q}$ ，其中 p 、q 為整數及 $q>0$ 。

$y=(x^{\frac{1}{q}})^{p}$

$=u^{p}$ ，其中 $u=x^{\frac{1}{q}}$ 。

$\dfrac{dy}{du}=pu^{p-1}$

$\dfrac{dx}{du}=qu^{q-1}$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{du}$

$pu^{p-1}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)(qu^{q-1})$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{p}{q}u^{p-q}$

$=\dfrac{p}{q}(x^{\frac{1}{q}})^{p-q}$

$=\dfrac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

$\dfrac{d}{dx}(x^{n})=nx^{n-1}$

3. 常數因子法則：$\dfrac{d}{dx}Cf(x)=C\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，其中 C 為一常數。

證明：

$\dfrac{d}{dx}Cf(x)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Cf(x+h)-Cf(x)}{h}$

$=C\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=C\dfrac{d}{dx}f(x)$

4. 和差法則 (Sum and Difference Rules)：$\frac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$

證明：

$$\frac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)\pm g(x+h))-(f(x)\pm g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))\pm(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$$

5. 積法則 (Product Rule)：$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

證明：

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))+(f(x+h)-f(x))g(x)}{h}$$

$$=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

6. 商法則 (Quotient Rule)：$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$，其中 $g(x)\neq 0$。

證明：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$= \frac{1}{g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x)(f(x+h)-f(x))-f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2}\left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x)(f(x+h)-f(x))}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x))g(x+h)-g(x))}{h} \right)$$

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

7. 鏈式法則 (Chain Rule)

若 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 為可微函數，則複合函數 $y=f(g(x))$ 的導數為 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 。

備註：

(a) 複合函數 (Composite Function)：

若 $y=f(u)$ 是 u 的函數， $u=g(x)$ 是 x 的函數，則 $y=f(u)=f(g(x))$ 也是 x 的函數。 $y=f(g(x))$ 稱為 $y=f(u)$ 與 $u=g(x)$ 的複合函數。

例：若 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2-1$，則 y 為一複合函數。

(b) $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ ，其中 u 為 x 的函數。

例 15

若 $y=88$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解：

例 16

若 $y=-2$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解：

例 17

若 $y = x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 18

若 $y = x^4$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 19

若 $y = x^{-2}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 20

若 $y = \sqrt{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 21

若 $y=6x^3$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 22

若 $y=\dfrac{9}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 23

若 $y=2x^{-7}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 24

若 $y = x^3 + 3$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 25

若 $y = 2x^2 + 7x - 11$，求

(a) $\frac{dy}{dx}$，

(b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$。

解：

例 26

若 $f(x) = 3x^2 + 8x + 7$，求

(a) $f'(x)$，

(b) $f'(2)$。

解：

例 27

若 $y=x^{10}+9x^{8}+7x-5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 28

若 $y=4x^{2}-\dfrac{1}{x^{2}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 29

若 $y=-3x+5-4x^{-3}-5x^{-4}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 30

若 $y=11-\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 31

若 $y=\dfrac{2x^2-5x+4}{x}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 32

若 $y=\dfrac{x(x-1)}{x^2}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 33

若 $y=x(x+3)(2x+1)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 34

若 $y=(2x^2+5)(x-7)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 35

若 $y=(10-7x)(12-5x)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 36

若 $y=(x+2)(12x^2+6x-5)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 37

若 $y=(x^2-2x-1)(\sqrt{x}+3)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 38

若 $y=(2x+1)(x+3)(4-x)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 39

若 $y=\dfrac{7x-9}{4x+1}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 40

若 $y=\dfrac{5x}{1+3x^2}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 41

若 $y=\dfrac{(x+1)(x-5)}{2x-3}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 42

若 $y=\dfrac{2+3\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 43

若 $y = u^3 + 4$ 及 $u = x^2 + x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 44

若 $y = (x^2 + 5x - 6)^7$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 45

若 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2x^2}}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 46

若 $y=\dfrac{3}{4x-5}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 47

若 $y=(x+1)^3(3x-5)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 48

若 $y=(2-5x)^{\frac{2}{5}}(7-3x)^{\frac{1}{3}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 49

若 $y=\dfrac{(3x-2)^3}{(2x+1)^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 50

若 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 51

若 $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 52

若 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^{10}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 53

若 $y=\sqrt[3]{\dfrac{3x+4}{3x-2}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

4.3 <u>續函數的求導法</u>

1. 三角函數 (Trigonometric Function) 的微分

(a) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)\left(\lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= (\cos x)(1)$$

$$= \cos x$$

備註：$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

(b) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\left(\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)\left(\lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= -(\sin x)(1)$$

$$= -\sin x$$

備註：$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

(c) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\tan x$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\tan(x+h-x))(1+\tan(x+h)\tan x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h(1+\tan(x+h)\tan x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h(1+\tan(x+h)\tan x)}{h\cos h}$$
$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{1+\tan(x+h)\tan x}{\cos h}\right)$$
$$= (1)(1+\tan^2 x)$$
$$= \sec^2 x$$

備註：$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

(d) $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\cot x$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\tan(x+h)} - \frac{1}{\tan x}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan x - \tan(x+h)}{h\tan x\tan(x+h)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\tan(x-(x+h))(1+\tan x\tan(x+h))}{h\tan x\tan(x+h)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\tan(-h))(1+\tan x\tan(x+h))}{h\tan x\tan(x+h)}$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\tan h(1+\tan x\tan(x+h))}{h\tan x\tan(x+h)}$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h(1+\tan x\tan(x+h))}{h\cos h\tan x\tan(x+h)}$$

$$=-\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1+\tan(x+h)\tan x}{\cos h\tan x\tan(x+h)}\right)$$

$$=-(1)\left(\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\right)$$

$$=-(\cot^2 x+1)$$

$$=-\operatorname{cosec}^2 x$$

備註：$\frac{d}{dx}\cot u=-\operatorname{cosec}^2 u\frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

(e) $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\sec x$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x-(x+h)}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{-h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right)$$

$$=(1)\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$$

$$=\sec x\tan x$$

備註：$\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

(f) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}x = -\operatorname{cosec}x\cot x$

證明：

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}x$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec}x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sin(x+h)}-\dfrac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x-\sin(x+h)}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\dfrac{x+x+h}{2}\sin\dfrac{x-(x+h)}{2}}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\dfrac{2x+h}{2}\sin\dfrac{-h}{2}}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= -\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{\sin x\sin(x+h)}\right)$$

$$= -(1)\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= -\operatorname{cosec}x\cot x$$

備註：$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}u = -\operatorname{cosec}u\cot u\dfrac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

例 54

若 $y=\sin 2x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 55

若 $y=\tan(3x+1)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 56

若 $y=\sin^2 x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 57

若 $y=\sin 2x+\cos 3x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 58

若 $y=\sin 2x\cos 3x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 59

若 $y=\cos^3(x^4+1)$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 60

若 $y=x^2\sin^4 3x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 61

若 $y=\tan^3 x-3\tan x+3x$ ，證明 $\dfrac{dy}{dx}-3\tan^4 x=0$ 。

解：

例 62

(a) 證明

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^4\dfrac{x}{2}-\cos^4\dfrac{x}{2}\right)=\sin x$，

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\sin 2x$。

(b) 利用(a)，或其他方法，證明 $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^8\dfrac{x}{2}-\cos^8\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2\sin x-\sin^3 x+\sin 2x\cos x)$。

解：

2. 指數函數 (Exponential Function) 的微分

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

證明：

$$\frac{d}{dx}e^x$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} e^x\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right)$$

$$= (e^x)(1)$$

$$= e^x$$

備註：$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$，其中 u 為 x 的函數。

例 63

若 $y = e^{-3x+5}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 64

若 $y = (7 - e^{-x})^4$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 65

若 $y = e^{x}\sin 2x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 66

若 $f(x) = \dfrac{2+e^{3x}}{2-e^{3x}}$，求

(a) $f\,'(x)$，

(b) $f\,'(0)$。

解：

例 67

若 $y=\tan(e^{2x})$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 68

若 $y=e^{\cos 3x}$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

3. 對數函數 (Logarithmic Function) 的微分

(a) $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$，其中 $x>0$。

證明：

$$\frac{d}{dx}\ln x$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \left(\ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{\frac{h}{x}}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \ln e$$

$$= \frac{1}{x}$$

備註：$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$，其中 $u > 0$ 及 u 為 x 的函數。

(b) $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$，其中 $a > 0$ 及 $a \neq 1$。

證明：

設 $y = \log_a x$。

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

備註：$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$，其中 $u > 0$ 及 u 為 x 的函數。

例 69

若 $y = \ln(7x^2 - 8)$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 70

若 $y = x^3 \ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 71

若 $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 72

若 $y=\ln(2x^2+5)^3$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 73

若 $y=\ln(\ln x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 74

若 $y=\log_4(3x^2-1)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

4.4 隱函數 (Implicit Function) 的求導法

在一個關於 x 及 y 的方程中，若 y 不是以 x 來表示，則 y 稱為 x 的隱函數。一般來說，我們極不容易甚至不可能把隱函數化成顯函數 (explicit function) 。

例： $xy+x+y^2-1=0$，$x^2+y^2=9$ 及 $\sqrt{xy}+x+y^3=0$ 中， y 都是 x 的隱函數。

規則：在一個關於 x 及 y 的方程中，把 y 視為 x 的函數，然後在方程的兩邊同時對 x 求導數。由此可得出一個關於 x 、 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 的方程，然後以 x 及 y 表 $\frac{dy}{dx}$ 。

例 75

若 $x^4+2y^4-8=0$，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解：

例 76

若 $y^2=4x$，求

(a) $\frac{dy}{dx}$ ，

(b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,4)}$ 。

解：

例 77

若 $y=\cos(x+y)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 78

若 $\ln y+x=y^2$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 79

若 $e^x\ln y=3x^2-x$，證明 $\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}y(-3x^2+7x-1)$。

解：

4.5 對數求導法 (Logarithmic Differentiation)

1. 首先對方程的兩邊取自然對數，然後對所得的隱函數求導，最後解 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

2. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ ，其中 $a>0$ 。

   證明：

   設 $y = a^x$ 。

   $\ln y = \ln a^x$

   $\ln y = x\ln a$

   $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \ln a$

   $\dfrac{dy}{dx} = y\ln a$

   $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a$

   備註：

   (a) $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$

   (b) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

例 80

若 $y = (\log 2)^x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

例 81

若 $y = x^x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 82

若 $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

例 83

若 $y = x^{\ln x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

例 84

若 $y=\dfrac{(2x-5)^3}{x^2(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}$ ，利用對數求導法證明 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2x-5)^2(2x^3+25x^2+4x+20)}{2x^3(x^2+1)^{\frac{5}{4}}}$ 。

解：

例 85

設 $y=\dfrac{(1+x^{2})e^{-x}}{1-x^{2}}$。

(a) 利用對數求導法證明 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^{4}+4x-1)e^{-x}}{(1-x^{2})^{2}}$。

(b) 當 $x=-2$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

4.6 二階導數 (Second Derivative)

二階導數是可以由一階導數微分獲得。已知一函數 $y=f(x)$ 可微分得其一階導數 $y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)$，則 $f'(x)$ 的導數稱為二階導數並以 $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 為記號。

例 86

若 $y=2x^7-3x+6$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：

例 87

若 $y=\sqrt{x^2+1}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：

例 88

若 $y = xe^{-4x}$ ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：

例 89

若 $y = e^{4x}\ln x$ ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：

例 90

若 $y=\dfrac{x+4}{3x-7}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：

例 91

已知 $y=a\sin x+\cos x$ 滿足方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=b$，其中 a 及 b 均為常數。當 $x=0$，$\dfrac{dy}{dx}=2$。求 a 及 b 的值。

解：

例 92

設 $y=e^{-x}\cos 3x$。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(b) 設 a 及 b 均為常數使得對所有 x 的實數值，$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0$。求 a 及 b 的值。

解：

歷屆試題

中學文憑 數學單元二 2019 年甲部 Q1

設 $f(x)=\dfrac{10x}{7+3x^2}$。證明 $f(1+h)-f(1)=\dfrac{4h-3h^2}{10+6h+3h^2}$。由此，從基本原理求 $f'(1)$。

(4 分)

中學文憑　數學單元二 2018 年甲部 Q1

1. 設 $f(x)=(x^2-1)e^x$ 。以 h 表 $f(1+h)$ 。由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

中學文憑　數學單元二 2016 年甲部 Q1

2. 證明 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}=\dfrac{h}{(x+h)\sqrt{x}+x\sqrt{x+h}}$ 。由此，從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{3}{x}}$ 。 (5 分)

中學文憑　數學單元二 2015 年甲部 Q1

1. 從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}(x^5+4)$ 。 (4 分)

中學文憑　數學單元二 2015 年甲部 Q2

2. 設 $y=x\sin x+\cos x$ 。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 設 k 為一常數使得對所有 x 的實數值，$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+k\dfrac{dy}{dx}+xy=0$ 。求 k 的值。

(5 分)

中學文憑　數學單元二 2014 年甲部 Q4

4. 設 $x=2y+\sin y$ 。求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，答案以 y 表示。

（3 分）

中學文憑　數學單元二 2013 年甲部 Q1

1. 從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x)$ 。

（4 分）

中學文憑　數學單元二 2012 年甲部 Q1

1. 設 $f(x)=e^{2x}$ 。從基本原理求 $f'(0)$ 。

（3 分）