

佛教大光慈航中學
中四級數學科

姓名：_____ 分數：_____
班別：_____ () 日期：_____

第八課 對數

對數的性質

設 $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ 及 $x, y > 0$ 。

(a) $\log_a a^x = x$

(b) $\log_a 1 = 0$

(c) $\log_a a = 1$

(d) $\log_a XY = \log_a X + \log_a Y$

(e) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(f) $\log_a X^k = k \log_a X$ (k 是任意實數)

(g) $\log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$ (換底公式)

指數方程

指數中含有未知數的方程稱為指數方程。

設 $a > 0$ 及 $a \neq 1$ 。

(a) 若 $a^x = a^y$, 則 $x = y$ 。

(b) 若 $a^x = y$, 則 $x = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ 。

例題 1

解 $4^{3x+1} = 4^{5-x}$

$$4^{3x+1} = 4^{5-x}$$

$$\therefore 3x + 1 = 5 - x \quad \blacktriangleleft \text{當 } a > 0 \text{ 及 } a \neq 1 \text{ 時,}\\ 4x = 4 \quad \text{可從 } a^x = a^y \text{ 得出 } x = y.$$

$$x = \underline{\underline{1}}$$

解下列各指數方程。[第 1-2 題]

1. $2^{x-2} = \sqrt{2}$

2. $3^{2-3x} = \frac{1}{9}$

例題 2

解 $3^x = 11$, 取答案準確至三位有效數字。

$$3^x = 11$$

$$\log 3^x = \log 11 \quad \blacktriangleleft \text{兩邊取常用對數。}$$

$$x \log 3 = \log 11 \quad \blacktriangleleft \log_a X^k = k \log_a X$$

$$x = \frac{\log 11}{\log 3}$$

$$= \underline{\underline{2.18}} \quad (\text{準確至三位有效數字})$$

解下列各指數方程，取答案準確至三位有效數字。[第 3-4 題]

$$3. \quad 19^x = 1.9$$

$$4. \ 5^{2x} = \sqrt{15}$$

Handwriting practice lines consisting of ten sets of horizontal lines. Each set includes a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line.

Handwriting practice lines consisting of three horizontal lines per row: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line.

對數方程

含有未知數的對數的方程稱為對數方程。

設 $a > 0$ 及 $a \neq 1$ 。

(a) 若 $\log_a X = y$, 則 $X = a^y$ 。 (b) 若 $\log_a X = \log_a y$, 則 $X = y$ 。

即時例題 3

$$\text{解 } \log_5 x = 3 \text{ 和 } \log_2 (y + 4) = \log_2 3.$$

$$\begin{aligned} \log_5 X &= 3 \\ \therefore X &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2(y+4) &= \log_2 3 \\ \therefore y+4 &= 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

解下列各對數方程。[第 5-6 題]

5. $\log_3 X = -2$

$$6. \log (x + 3) = 4 \log 3$$

Handwriting practice lines consisting of ten sets of horizontal lines. Each set includes a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line.