8 對數函數 (Logarithmic Function) ✂

8.1 對數（Logarithm）的定義 ✂

設 x、y 為變數，a 為常數，而 $a>0$ 及 $a\neq 1$。若 $x=a^y$，則 $y=\log_a x$。y 稱為 x 以 a 為底的對數。

例：若 $x=4^y$，則 $y=\log_4 x$。

備註：

1. $\because$ 對於所有 y 值，$a^y>0$。
   $\therefore$ $x>0$。
   $\log_a x$ 只有在 $a>0$ 及 $a\neq 1$，並且 $x>0$ 時才有意義。
2. 若 $a=10$，y 稱為 x 以 10 為底的對數，或稱為 x 的常用對數（common logarithm），即若 $x=10^y$，則 $y=\log_{10} x$，或簡寫成 $y=\log x$。
3. 若 $a=e$，y 稱為 x 以 e 為底的對數，或稱為 x 的自然對數（natural logarithm），即若 $x=e^y$，則 $y=\log_e x$，或簡寫成 $y=\ln x$。
   留意，$e=2.718281828.....$。
4. 若 $y=\log_a x$，則 $x=a^y$。
   例：若 $y=\log_3 x$，則 $x=3^y$。
5. $\log_a a^x=x$
6. $a^{\log_a x}=x$

例 1 ✂

若 $10^y=3$，求 y。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 2 ✂

若 $\log x=1.5$，求 x。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 3 ✂

若 $\log_7 x = -2.1$，求 x。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

8.2 <u>對數的性質</u> ✂

設 $a > 0$ 及 $a \neq 1$。對於 $M > 0$ 及 $N > 0$，對數有以下性質：

1. $\log_a 1 = 0$

   證明：

   $\because \quad a^0 = 1$

   $\therefore \quad \log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

   證明：

   $\because \quad a^1 = a$

   $\therefore \quad \log_a a = 1$

3. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

   證明：

   設 $x = \log_a M$ 及 $y = \log_a N$。

   $M = a^x$ 及 $N = a^y$。

   $MN = a^x \cdot a^y$

   $= a^{x+y}$

   $\log_a MN = x + y$

   $= \log_a M + \log_a N$

4. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

   證明：

   設 $x = \log_a M$ 及 $y = \log_a N$。

   $M = a^x$ 及 $N = a^y$。

   $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y}$

   $= a^{x-y}$

   $\log_a \dfrac{M}{N} = x - y$

   $= \log_a M - \log_a N$

5. $\log_a M^k = k \log_a M$，其中 k 為實數。

   證明：

設 $x=\log_a M$ 。

$M=a^x$

$M^k=(a^x)^k$

$=a^{kx}$

$\log_a M^k=kx$

$=k\log_a M$

6. $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ ，其中 $b>0$ 及 $b\neq 1$ 。(換底公式)

證明：

設 $x=\log_b N$ 。

$N=b^x$

$\log_a N=\log_a b^x$

$=x\log_a b$

$x=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

備註：$\log_b N=\dfrac{1}{\log_N b}$

例 4 ✂

求 $\log_5 125$ 。

解：

例 5 ✂

求 $\log_4\sqrt{64}$ 。

解：

例 6 ✂

求 $\log_{25}125$ 。

解：

例 7 ✂

求 $\log_{2}15$ 。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 8 ✂

求 $\log 125+\log 8$ 。

解：

例 9 ✂

求 $\log_2 96 - \log_2 12$ 。

解：

例 10 ✂

求 $\log_6 3 + \log_6 48 - 2\log_6 2$ 。

解：

例 11 ✂

設 $a = \log_3 2$ 及 $b = \log_3 5$ 。以 a 及 b 表

(a) $\log_3 100$ ，

(b) $\log 5$ 。

解：

例 12 ✂

求 $2\log_5 x+\log_5 \frac{1}{x^2}$，其中 $x>0$ 且 $x\neq 1$。

解：

例 13 ✂

求 $\frac{\log_2(3x)}{\log_2(9x^5)-\log_2 x^3}$，其中 $x>0$ 且 $x\neq 1$。

解：

例 14 ✂

求 $\dfrac{\log_9 x^4}{\log_3 x^5}$，其中 $x>0$ 且 $x\neq 1$。

解：

例 15 ✂

求 $\dfrac{\log_7(x^4y)-\log_7(xy)}{\log_7 x^6}$，其中 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq 1$，$y\neq 1$。

解：

8.3 對數方程 ✂

含有未知數的對數的方程稱為對數方程。

例： $\log_4(2x+1)=3$， $\log_5(3x-2)-\log_5(x+1)=1$。

解對數方程時，須應用對數的定義或性質。若方程的兩方為同一個底的對數，就可利用以下性質：

若 $\log_a x=\log_a y$，則 $x=y$。

備註：

1. 解對數方程後必須進行驗算，以檢查方程中的每一個對數是否有意義。
2. 當指數方程的兩方難以化為同一個底的冪時，我們可以利用對數來解該方程。
   例： $2^{x+3}=7$，$3^{5x}=5^{2x+1}$。

例 16 ✂

解方程 $\log_3(x-1)=3$。

解：

例 17 ✂

解方程 $\log_x 5=2$。答案以根式表示。

解：

例 18 ✂

解方程 $\log_x 4=-3$。答案以根式表示。

解：

例 19 ✂

解方程 $\log_2(3x+1)+\log_4 64=-1$ 。

解：

例 20 ✂

解方程 $\log_6 x-\log_6(x-1)=2$ 。

解：

例 21 ✂

解方程 $\log(x-3)-\log(x-102)=-2$ 。

解：

例 22 ✂

解方程 $\log_3(3^{x+1}-18)=x$ 。

解：

例 23 ✂

解方程 $5^{x-1}=12$。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 24 ✂

解方程 $3^{x}=4^{x+1}$。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 25 ✂

解方程 $5^{x}=2(10^{x-1})$。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 26 ✂

把一筆款項存入銀行，年利率為 3%，每年計算複利息一次。求要得到本利和超過本金的兩倍所需的時間。答案須準確至最接近的年。

解：

例 27 ✂

一部手提電話的價值每年以固定的折舊率 16% 下降。設該手提電話現時的價值為 $1980。求最少要多少年該手提電話的價值會降至低於 $1000。答案須準確至最接近的年。

解：

8.4 <u>對數函數</u> ✂

設 x、y 為變數，a 是常數，而 $a>0$ 及 $a\neq 1$，則 $y=\log_a x$ 稱為以 a 為底的對數函數。

例 28 ✂

若 $f(x)=\log x$，求 $f(2)$ 的值。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

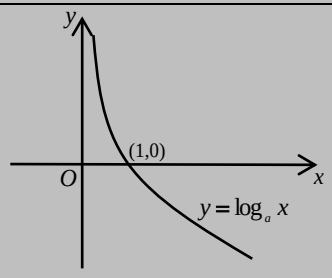
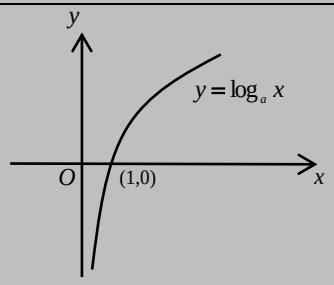
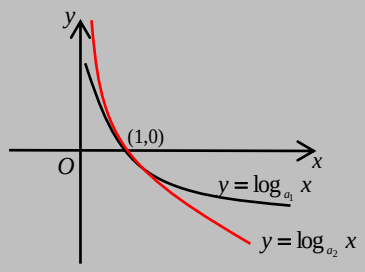
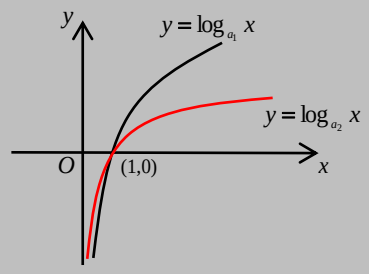
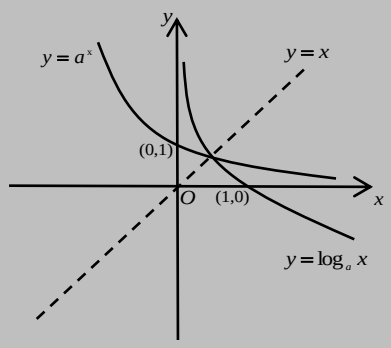
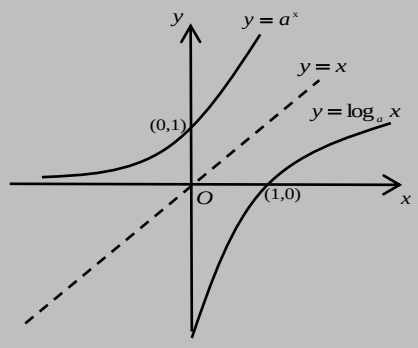
例 29 ✂

若 $g(x)=\log_4 x$，求 $g(6)$ 的值。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

8.5 對數函數的性質及圖像的特徵 ✂

設 $y=\log_a x$，其中 a 是常數，而 $a>0$ 及 $a\neq 1$。

a 值範圍	$0<a<1$	$a>1$
性質	1. 函數的定義域為所有正實數。	
	2. y 的值為所有實數。	
圖像		
	備註：	
	1. $y=\log_a x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖像是沿 x 軸反射對稱的。	
	2. 設 $0<a_1<a_2<1$。 	設 $a_2>a_1>1$。 
圖像的共同特徵	1.圖像沒有 y 截距。	
	2.圖像位於 y 軸的右方。	
	3.圖像的 x 截距為 1。	
	4.圖像並無極大點、極小點或對稱軸。	
圖像的相異之處	1.(a)對於 $0<x<1$，$\log_a x>0$。 (b)對於 $x>1$，$\log_a x<0$。	1.(a)對於 $0<x<1$，$\log_a x<0$。 (b)對於 $x>1$，$\log_a x>0$。
	2.當 x 的值增加時，$\log_a x$ 的值會相應減少。	2.當 x 的值增加時，$\log_a x$ 的值會相應增加。
	3.當 x 的值增加時，$\log_a x$ 的值的遞減率會減慢。	3.當 x 的值增加時，$\log_a x$ 的值的遞增率會減慢。
備註	$y=a^x$ 及 $y=\log_a x$ 的圖像對稱於 $y=x$。	
		

例 30 ✂

函數 $C_1: y=\log_2 x$ 的圖像沿 x 軸反射可得出函數 C_2 的圖像。求函數 C_2。

解：

例 31 ✂

函數 $C_1: y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖像沿 x 軸反射可得出函數 C_2 的圖像。求函數 C_2。

解：

例 32 ✂

函數 $C_1: y=3^x$ 的圖像沿直線 $y=x$ 反射可得出函數 C_2 的圖像。求函數 C_2。

解：

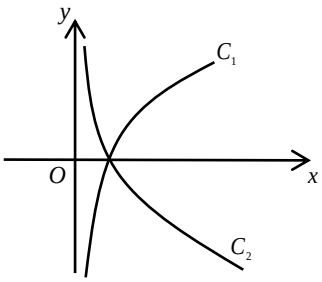
例 33 ✂

函數 $C_1: y=\log_{0.1} x$ 的圖像沿直線 $y=x$ 反射可得出函數 C_2 的圖像。求函數 C_2。

解：

例 34 ✂

圖中所示為 C_1 及 C_2 的圖像。已知該兩個圖像代表對數函數 $y=\log_{0.1}x$ 及 $y=\log_3 x$。



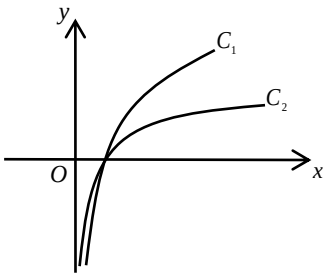
(a) 寫出該兩個圖像的 x 截距。

(b) 寫出 C_1 及 C_2 對應的對數函數。

解：

例 35 ✂

圖中所示為 C_1 及 C_2 的圖像。已知該兩個圖像代表對數函數 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{10} x$。



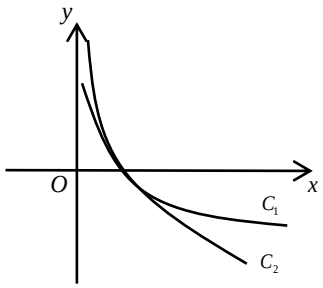
(a) 寫出該兩個圖像的 x 截距。

(b) 寫出 C_1 及 C_2 對應的對數函數。

解：

例 36 ✂

圖中所示為 C_1 及 C_2 的圖像。已知該兩個圖像代表對數函數 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$。



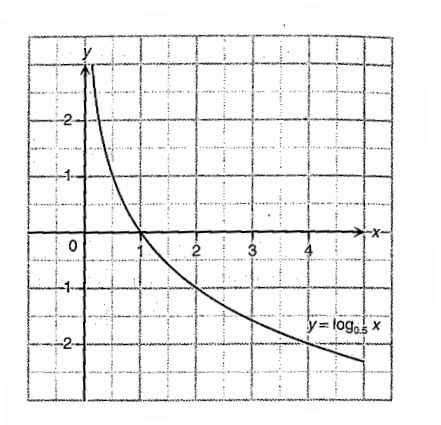
(a) 寫出該兩個圖像的 x 截距。

(b) 寫出 C_1 及 C_2 對應的對數函數。

解：

例 37 ✂

圖中所示為對數函數 $y=\log_{0.5}x$ 的圖像。



(a) 寫出該圖像的 x 截距。

(b) 利用該圖像，求下列各對數的值。答案須準確至 1 位小數。

(i) $\log_{0.5}1.5$

(ii) $\log_{2}2.3$

(c) 利用該圖像，解下列各對數方程。答案須準確至 1 位小數。

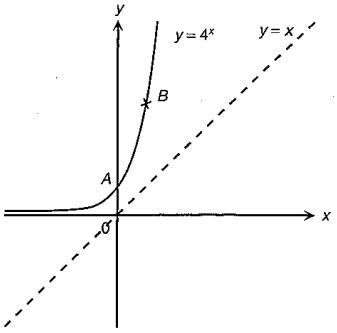
(i) $\log_{0.5}x=-1.5$

(ii) $\log_{2}x=1.6$

解：

例 38 ✂

圖中，$C_1: y=4^x$ 的圖像與 y 軸相交於點 A，並通過點 $B(1,b)$。



(a) 寫出 A 的坐標。

(b) 求 b 的值。

(c) $C_1: y=4^x$ 的圖像沿直線 $y=x$ 反射可得出函數 C_2 的圖像。求函數 C_2。

(d) B 沿直線 $y=x$ 反射至點 D。

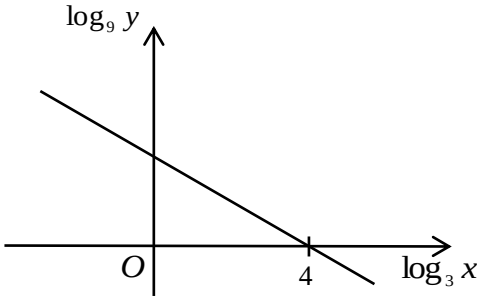
(i) 寫出 D 的坐標。

(ii) 已知點 Q 位於直線 $y=x$ 上，且 B、Q 及 D 共線。求 Q 的坐標。

解：

例 39 ✂

圖中的圖像顯示 $\log_3 x$ 與 $\log_9 y$ 之間的線性關係。該圖像的斜率及在水平軸上的截距分別為 $-\frac{1}{2}$ 及 4。

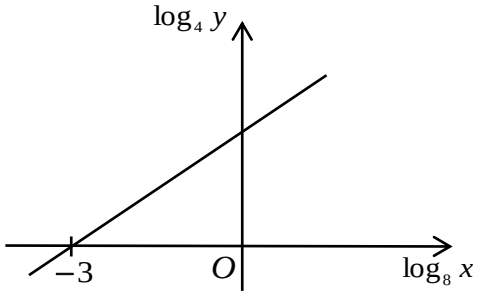


將 x 與 y 之間的關係表為 $y = Ax^k$ 的形式，其中 A 及 k 均為常數。

解：

例 40 ✂

圖中的圖像顯示 $\log_8 x$ 與 $\log_4 y$ 之間的線性關係。該圖像的斜率及在水平軸上的截距分別為 $\frac{2}{3}$ 及 -3。



將 x 與 y 之間的關係表為 $y = Ax^k$ 的形式，其中 A 及 k 均為常數。

解：

8.6 對數函數的應用 ✂

1. 黎克特制（Richter Scale）地震震級

地震的震級通常以黎克特制來表示，它是美國地震學家黎克特在 1935 年提出，按照地震儀器探測到的地震波的振幅而將地震分級。

黎克特制震級，$M = \log A + K$，其中 A 代表地震波的振幅，而 K 為一個常數。

若考慮地震波的能量 E 與黎克特制地震震級 M 的關係時，則可以用以下公式：

$$\log E = 1.5M + C$$

，其中 C 為一個常數。

黎克特制震級	影響
2.0 以下	很小，沒感覺。
2.0-2.9	人一般沒感覺，設備可以記錄。
3.0-3.9	經常有感覺，但是很少會造成損失。
4.0-4.9	室內東西搖晃出聲，不太可能有大量損失。當地震強度超過 4.5 級時，已足夠讓全球的地震儀監測得到。
5.0-5.9	可在小區域內對設計／建造不佳的建築物造成大量破壞，但對設計/建造優良的建築物則只會有少量的損害。
6.0-6.9	可摧毀方圓 160 km 以內的居住區。
7.0-7.9	可對更大的區域造成嚴重破壞。
8.0-8.9	可摧毀方圓數百 km 的區域。
9.0-9.9	摧毀方圓數千 km 的區域。

例 41 ✂

已知黎克特制震級，$M = \log A + K$，其中 A 代表地震波的振幅，而 K 為一個常數。某地區發生一次黎克特制 8.5 級的地震。數小時後，該地區發生一次黎克特制 6.7 級的餘震。若第一次地震及其後的一次餘震的振幅分別為 A_1 及 A_2，求 $\frac{A_1}{A_2}$。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 42 ✂

已知地震波的能量 E 與黎克特制地震震級 M 的關係用以下公式表示：

$$\log E = 1.5M + C$$

，其中 C 為一個常數。

智利大地震和三藩市大地震分別為黎克特制 9.5 級及 7.8 級。若智利大地震和三藩市大地震中地震波的能量分別為 E_1 及 E_2，求 $\frac{E_1}{E_2}$。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

2. 聲強級

聲強是用來量度聲音強弱的程度。在物理學上，表示聲強的單位是 Wm^{-2}。由於聲強的差別可以十分大(由 $10^{-12}\ \text{Wm}^{-2}$ 至 $100\ \text{Wm}^{-2}$)，我們會計算它們的對數，這就產生了聲強級。聲強級的單位是分貝(符號為 dB)。

人耳僅能聽見的最低聲強 $I_o = 10^{-12}\ \text{Wm}^{-2}$。科學家把這個聲強定為 0 dB。對於聲強為 I 的聲音，其聲強級 β 定義為 $\beta = 10\log\dfrac{I}{I_o}$。

因此，

$$\beta = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$$
$$= 10\log(10^{12}I)$$

聲音來源	聲強級(dB)
悄聲說話	30
寧靜街角	50
日常交談	60
高聲歌唱	75
操作中的吸塵機	80
繁忙交通	90
的士高	100
建築地盤	110
雷聲	120
飛行中的民航機	130

例 43 ✂

已知聲強為 $I\ \text{Wm}^{-2}$ 的聲音，其聲強級 β dB 定義為 $\beta = 10\log(10^{12}I)$。若一風鑽產生的聲強為 $10^{-3}\ \text{Wm}^{-2}$，求它的聲強級。

解：

例 44 ✂

已知聲強為 $I\ \mathrm{Wm}^{-2}$ 的聲音，其聲強級 $\beta\,\mathrm{dB}$ 定義為 $\beta = 10\log(10^{12}I)$。若一柴油引擎所產生的聲強級為 $75\,\mathrm{dB}$，求它的聲強。答案須準確至 3 位有效數字。

解：

例 45 ✂

已知聲強為 $I\ \mathrm{Wm}^{-2}$ 的聲音，其聲強級 $\beta\,\mathrm{dB}$ 定義為 $\beta = 10\log(10^{12}I)$。若一個聲音的聲強由 $I_1\ \mathrm{Wm}^{-2}$ 增加至 $I_2\ \mathrm{Wm}^{-2}$，則其聲強級增加了 $10\,\mathrm{dB}$。求 $\dfrac{I_2}{I_1}$。

解：

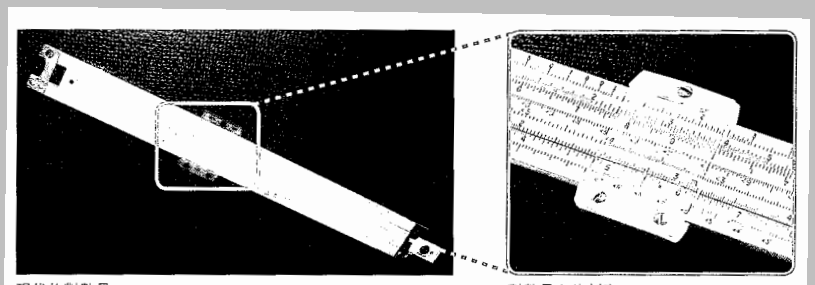
8.7 對數概念的發展 ✂

在計算機和電腦面世前，對數方法的發明在人類文明的發展過程中起著巨大的作用。早在 16、17 世紀，歐洲的科技發展非常蓬勃，人們要處理的計算愈來愈複雜，天文學家更經常碰到龐大的數字的乘除、乘方及開方，這種龐大數字的計算不但花費大量的時間，而且非常容出錯，於是數學家便使用對數方法來進行比較複雜的計算。

1. 對數表

對數																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	.4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	.5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	.5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	.5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	.5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	.5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	.5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	.5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	.5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10

2. 對數尺



現代的對數尺　　對數尺上的刻度

歷屆試題

卷一

中學文憑　數學 2017 年乙部 Q15

15. 設 a 及 b 均為常數。將 $y=a+\log_b x$ 的圖像記為 G。G 的 x 截距為 9 且 G 通過點 $(243,3)$。以 y 表 x。 (4 分)

中學文憑　數學 2014 年乙部 Q15

15. 圖 4 中的圖像顯示 $\log_4 x$ 與 $\log_8 y$ 之間的線性關係。該圖像的斜率及在水平軸上的截距分別爲 $\frac{-1}{3}$ 及 3。將 x 與 y 之間的關係表爲 $y=Ax^k$ 的形式，其中 A 及 k 均爲常數。 (3 分)

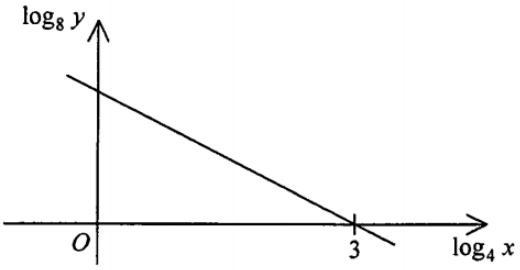


圖 4

卷二

中學文憑　數學 2019 年乙部 Q31

31. 已知 $\log_9 y$ 為 $\log_3 x$ 的線性函數。該線性函數的圖像在垂直軸上的截距及在水平軸上的截距分別為 7 及 8。下列何者必為正確？

A. $x^4y^7=3^{56}$

B. $x^7y^4=3^{56}$

C. $x^7y^8=3^{56}$

D. $x^8y^7=3^{56}$

中學文憑　數學 2019 年乙部 Q32

32. 若 $\frac{3}{3\log x-2}+7=\frac{2}{2\log x+1}$，則 $\log\frac{1}{x}=$

A. -3 或 2。

B. -2 或 3。

C. $\frac{-1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$。

D. $\frac{-1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$。

中學文憑　數學 2018 年乙部 Q32

32. 圖中所示為在同一直角坐標系上 $y=\log_a x$ 的圖像及 $y=\log_b x$ 的圖像，其中 a 及 b 均為正常數。若一垂直線分別與 $y=\log_a x$ 的圖像、$y=\log_b x$ 的圖像及 x 軸相交於點 A、點 B 及點 C，則下列何者正確？

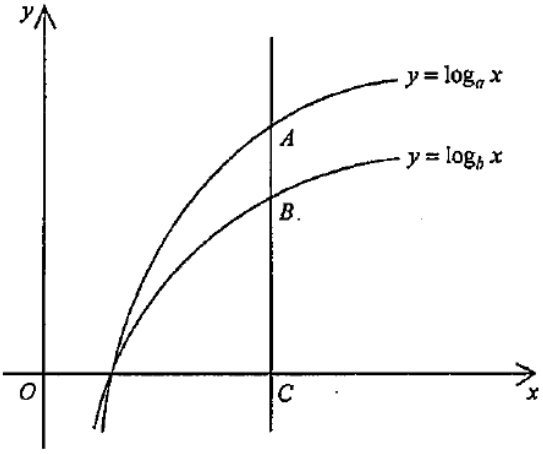
I. $a>1$
II. $a>b$
III. $\frac{AB}{BC}=\log_a\frac{b}{a}$

A. 只有 I

B. 只有 II

C. 只有 I 及 III

D. 只有 II 及 III



中學文憑　數學 2018 年乙部 Q33

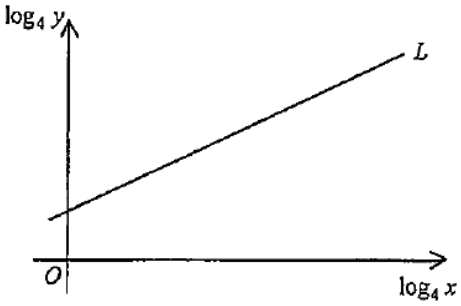
33. 圖中，直線 L 顯示 $\log_4 x$ 與 $\log_4 y$ 之間的關係。已知 L 通過點 $(1,2)$ 及點 $(9,6)$。若 $y=kx^a$，則 $k=$

A. $\frac{1}{2}$。

B. $\frac{3}{2}$。

C. 2。

D. 8。



中學文憑　數學 2017 年乙部 Q34

34. 若 $\begin{cases} \log_9 y = x-3 \\ 2(\log_9 y)^2 = 4-x \end{cases}$，則 $y=$

A. -1 或 $\frac{1}{2}$。

B. 1 或 $\frac{1}{3}$。

C. 2 或 $\frac{7}{2}$。

D. 3 或 $\frac{1}{9}$。

中學文憑　數學 2016 年乙部 Q32

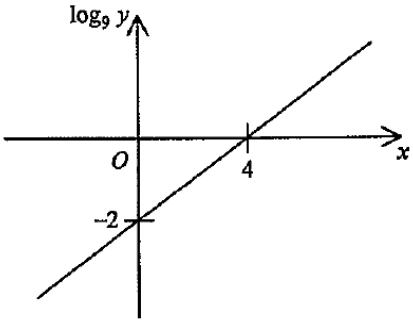
32. 圖中的圖像顯示 x 與 $\log_9 y$ 之間的線性關係。若 $y=ab^x$，則 $b=$

A. -2。

B. $\frac{1}{81}$。

C. $\frac{1}{2}$。

D. 3。



中學文憑　數學 2015 年乙部 Q32

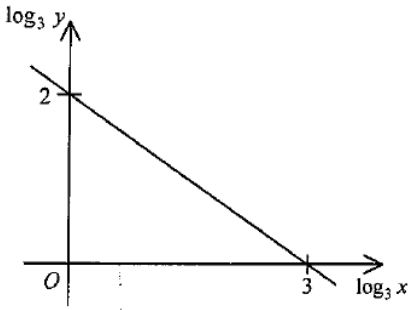
32. 圖中的圖像顯示 $\log_3 x$ 與 $\log_3 y$ 之間的線性關係。下列何者必為正確？

A. $x^2y^3=729$

B. $x^3y^2=729$

C. $x^2+y^3=729$

D. $x^3+y^2=729$



中學文憑　數學 2014 年乙部 Q32

32. 圖中所示爲在同一直角坐標系上 $y=b^x$ 的圖像及 $y=c^x$ 的圖像，其中 b 及 c 均爲正常數。若一水平線 L 分別與 y 軸、$y=b^x$ 的圖像及 $y=c^x$ 的圖像相交於 A、B 及 C，則下列何者正確？

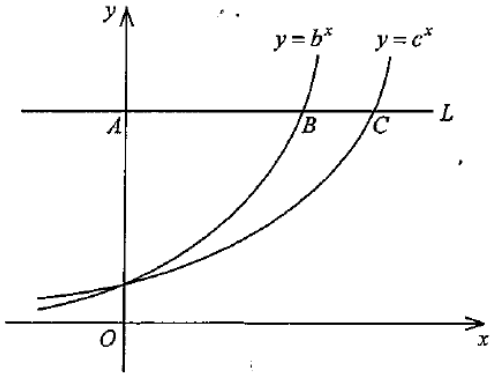
I. $b<c$
II. $bc>1$
III. $\frac{AB}{AC}=\log_b c$

A. 只有 I 及 II

B. 只有 I 及 III

C. 只有 II 及 III

D. I、II 及 III



中學文憑　數學 2014 年乙部 Q33

33. 下列何者最大？

A. 124^{241}

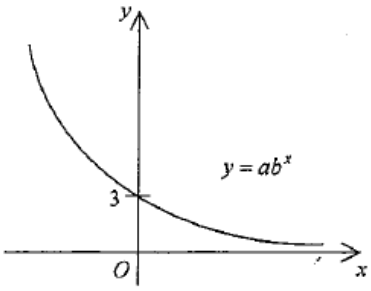
B. 241^{214}

C. 412^{142}

D. 421^{124}

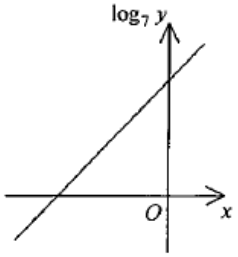
中學文憑　數學 2013 年乙部 Q32

32.

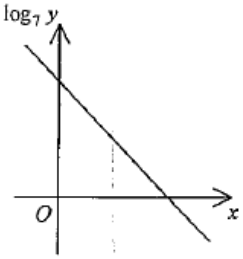


上圖所示為 $y = ab^x$ 的圖像，其中 a 及 b 均為常數。下列哪一個圖像可表示 x 與 $\log_7 y$ 之間的關係？

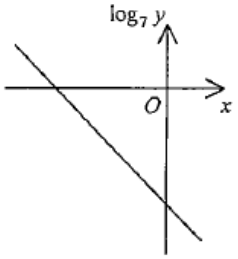
A.



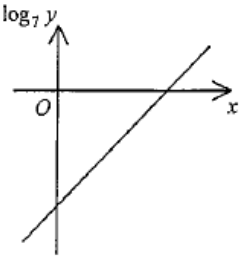
B.



C.



D.



中學文憑　數學 2013 年乙部 Q34

34.　若 $x - \log y = x^2 - \log y^2 - 10 = 2$，則 $y =$

A.　100。

B.　2 或 -4。

C.　$\frac{1}{100}$ 或 10 000。

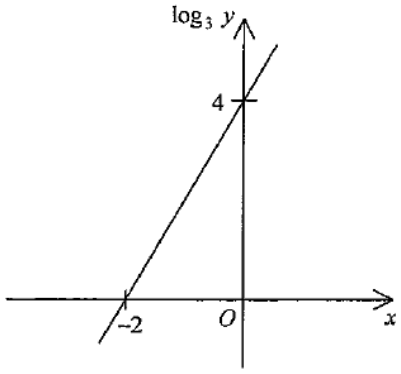
D.　$\frac{1}{10\,000}$ 或 100。

中學文憑　數學 2012 年乙部 Q32

32. 圖中的圖像顯示 x 與 $\log_3 y$ 之間的線性關係。若 $y = mn^x$ ，則 $n =$

A. $\frac{1}{81}$ 。

B. $\frac{1}{9}$ 。

C. 9 。

D. 81 。